

DETERMINACIÓN DEL ESPESOR DE LOS DIENTES DEL ENGRANE BIPARAMÉTRICO

DETERMINATION OF THE THICKNESS OF THE TEETH OF THE BIPARAMETRIC GEAR

Boris Voronin F., Jesús A. Álvarez S., José Antonio Gómez R.
boris.voronine@cucei.udg.mx / jaas2001@yahoo.es / gomezrey@yahoo.com

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad de Guadalajara, División de Ingenierías,
Departamento de Ingeniería Mecánica Eléctrica - <http://dime.cucei.udg.mx/>

Recibido: mayo 18, de 2006 / Aceptado: abril 18, de 2007 / Publicado: junio 22, de 2007

RESUMEN. Se muestra una solución a tres problemas teóricos de engranajes de dos grados de libertad: la obtención de la ecuación de la línea de acción en el engranaje biparamétrico, la determinación de la ecuación de la superficie exterior del engrane biparamétrico y del espesor de los dientes del mismo.

Se muestra la definición de un tipo de interferencia en la superficie exterior de los dientes de engranes biparamétricos que se manifiesta en dientes en punta. Se presentan los resultados del cálculo del espesor de los dientes en la superficie exterior de un engrane biparamétrico.

Palabras clave. Geometría, engranajes biparamétricos, espesor de los dientes, agudeza de los dientes.

ABSTRACT. A solution of three theoretical problems of gear drives of two degrees of freedom is shown: the obtaining of the contact line equation of biparametric gear drives, the determination of the external surface equation of the biparametric gear and of the thickness of the teeth of the same.

The definition of the interference type in the exterior surface of the teeth of biparametric gear is shown that demonstrates in teeth in top. The results of calculation of the thickness of the teeth in the exterior surface of the one biparametric gear are presented.

Key words. Geometry, biparametric gear, thickness of the teeth, sharpness of the teeth.

Nomenclatura

a_w = la distancia más corta entre los ejes de rotación de los engranes del biparamétrico y del generador.

\bar{e}_h y \bar{e}_2 = los vectores unitarios de las normales a las superficies de los dientes de los engranes de generación y biparamétrico, respectivamente.

\bar{e}' = el vector unitario de la normal a la superficie del cilindro generador que forma la superficie exterior del engrane biparamétrico.

h_{a2} = el coeficiente de altura de cabeza del diente del engrane biparamétrico.

m = el módulo de engranaje.

r_{bh} = el radio del círculo básico de la rueda dentada generadora.

$\bar{r}^{(h)}$ y $\bar{r}^{(2)}$ = los radio vectores de los puntos ubicados sobre las superficies de los dientes de la rueda generadora y biparamétrica, respectivamente.

u_{h2} = la relación de velocidad del engrane de generación al biparamétrico.

z_h y z_2 = los números de dientes del engrane herramienta (del engrane generador) y del biparamétrico, respectivamente.

$\bar{U}^{(h2)}$ = el vector velocidad relativa en el punto de contacto de las superficies conjugadas con los ángulos de giro del cilindro generador $\varphi = const$ y $\delta = var$.



$\overline{V}^{(h2)}$ = el vector velocidad del movimiento relativo en el punto de contacto de las superficies conjugadas con los ángulos de giro del cilindro generador $\varphi = \text{var}$ y $\delta = \text{const}$.

δ_h = el ángulo de intersección de los ejes de las ruedas dentadas en el engranaje de generación.

η_h = el ángulo de engranaje formado por las ruedas dentadas en el engranaje de generación.

α = el ángulo del presión de cremallera de básica.

x_h = el coeficiente de desplazamiento radial del engrane generador respecto al biparamétrico, también llamado coeficiente de corrección.

φ_h y φ_2 = las coordenadas angulares del engrane generador y del biparamétrico en los sistemas de coordenadas inmóviles correspondientes.

ω_h y ω_2 = las velocidades angulares de los engranes generador y biparamétrico, respectivamente.

ω_r = la velocidad angular del engrane biparamétrico en el movimiento alrededor del eje $q-q$ con respecto al engrane generador.

Nomenclature

a_w = the shortest distance between the axes of rotation of mesh of the biparamétrico and of the generator.

\overline{e}_h and \overline{e}_2 = the unit vectors normal to the surfaces of the teeth of the one gear of generation and biparametric, respectively.

\overline{e}' = the unit vector normal to the surface of the generating cylinder that forms the external surface of the one biparametric gear.

h_{a2} = the rate of height of head of the teeth of the one biparametric gear.

m = the gear module.

r_{bh} = the radius of the basic circle of the generating jagged wheel.

$\overline{r}^{(h)}$ and $\overline{r}^{(2)}$ = the radius vectors of the points located in the surface of the teeth of the generating wheel and biparametric, respectively.

u_{h2} = the transfer attitude of the gear of generation to the biparametric.

z_h y z_2 = the numbers of teeth of the shaper cutter of the court tool for you gear (of the one it gears generator) and of the biparametric, respectively.

$\overline{U}^{(h2)}$ = the relative velocity vector of the surfaces of the teeth of the generator gear wheel and of the biparametric in the contact point, when the angular position of the biparametric gear fixed, $\varphi_2 = \text{const}$, and the angle of intersection of the axes variable.

$\overline{V}^{(h2)}$ = the velocity vector of the relative of the surfaces of the teeth of the generator gear wheel and of the biparametric at the contact point when the angle of intersection of the axes fixed, $\delta = \text{const}$.

δ_h = the angle of intersection of the axes of the wheels indented in the gear assembly of generation.

η_h = the angle of gear assembly formed by the wheels indented in the gear assembly of generation.

α = the angle of the profile of the reference zipper.

x_h = the coefficient of radial displacement of the one gear generator regarding the biparametric, also called correction rate.

φ_h and φ_2 = the angular coordinates of the generator gear and biparametric in systems of the corresponding fixed coordinate system.

ω_h and ω_2 = the angular velocity of the jagged generating wheel and of the biparametric gear, respectively.

ω_r = the angular velocity of the turn of the biparametric gear regarding the generating gear around the axis $q-q$.

Introducción

En varios trabajos [1-4] se representan los análisis teóricos y aplicaciones prácticas de los engranajes de dos grados de libertad, que tienen el nombre de biparamétricos. Éstos están compuestos de un engrane cilíndrico y otro biparamétrico (véase la [Figura 1](#)) y están diseñados para transmitir el movimiento de rotación de una flecha a otra con una variación del ángulo de intersección de los ejes en un amplio diapasón, teóricamente de 0° a 180° .

En estos trabajos se muestran resultados de análisis de la cinemática de los engranajes compuestos de un engrane biparamétrico y otro cilíndrico cuyo parámetro es distinto del engrane de generación [2], también se representa un método de determinación de un tipo de interferencia en la raíz del diente del engrane biparamétrico, denominado socavación [4]. Éste aparece en el proceso de maquinado y perjudica el engrane. Y en los trabajos [5, 6] se representa el mismo método empleado para los engranes espaciales de un grado de libertad.

Sin embargo, la socavación no es el único peligro que puede tener el engrane. Existe otro tipo de interferencia cuando ambas superficies de un diente del engrane biparamétrico, la izquierda y la derecha, se intersecan dentro de la superficie exterior del engrane. Esto se manifiesta en el diente en punta. Este tipo de interferencia debilita la cabeza de los dientes y disminuye su altura, lo que disminuye la relación de contacto transversal. En los engranajes la relación de contacto transversal con la magnitud $\varepsilon_c < 1.0$ no es admisible ya que los dientes entran en contacto con golpes lo que, finalmente, provoca el atrancamiento del engranaje.

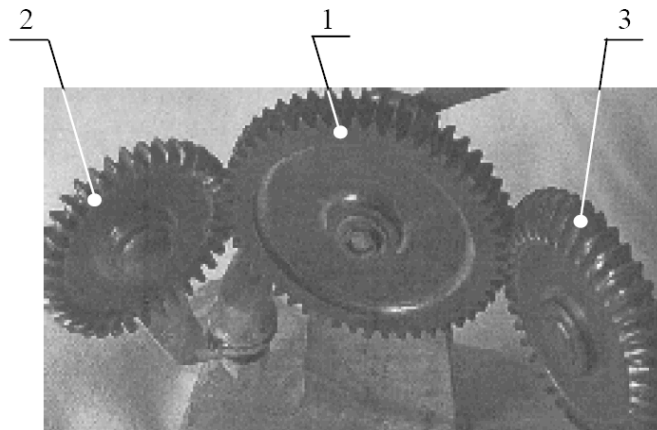


Figura 1. Modelo físico de engranaje del engrane cilíndrico 1 con dos engranes biparamétricos: con el 2 realiza la variación del ángulo de intersección de los ejes en el rango hasta 90° , y con el 3 hasta 60° .

El diente en punta se puede especificar midiendo el espesor de los dientes en el diámetro exterior. Por eso aquí se muestra un método para el cálculo del espesor de los dientes a la altura de un radio arbitrario r_x y en la superficie exterior del engrane biparamétrico. Igualdad a cero del espesor del diente en el diámetro exterior o un signo negativo de su magnitud manifiesta interferencia.

Introducción en la teoría general de los Engranajes Biparamétricos

La primera tarea, que se necesita resolver en la teoría de engranajes, es la determinación de la ecuación de la normal común en la que se realiza el contacto de dos superficies conjugadas. Los engranajes biparamétricos pertenecen a los espaciales por eso la determinación de esta se basa en el teorema general sobre la relación de velocidad instantánea presentada en el trabajo [7].

El teorema citado establece: “Si M_1 y M_2 son los puntos de intersección de la normal común $n-n$ con los planos paralelos P_1 y P_2 que pasan a través de los ejes de rotación de los engranes, entonces, las velocidades de estos puntos son iguales y la relación de velocidad del engranaje es inversamente proporcional a la razón de los radio vectores de éstos puntos”.

El teorema se ilustra en la [Figura 2](#) donde las superficies conjugadas F_1 y F_2 , que pertenecen a los eslabones 1 y 2, giran alrededor de los ejes O_1O_1 y O_2O_2 con velocidades angulares ω_1 y ω_2 , respectivamente. Las superficies están en contacto en el punto K a través del cual está trazada la normal común $n-n$. Ésta en los puntos M_1 y M_2 interseca los planos paralelos P_1 y P_2 , que pasan a través de los ejes O_1O_1 y O_2O_2 .

Las velocidades de los puntos K_1 y K_2 de los eslabones 1 y 2 son productos vectoriales de los vectores de las velocidades angulares $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$ y los radios vectores \bar{r}_{K1} y \bar{r}_{K2} : $\bar{v}_{K1} = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{K1}$ y $\bar{v}_{K2} = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{K2}$, respectivamente.

Según el teorema general de engranajes, en el punto de contacto el vector de la velocidad relativa de las superficies conjugadas es perpendicular a la normal común $n-n$, lo que se expresa como: $(\bar{v}_{K2} - \bar{v}_{K1}) \times \bar{n} = 0$. Es decir, las proyecciones de las velocidades de los puntos K_1 y K_2 sobre la normal común $n-n$ son iguales, lo que se expresa como: $pr. n-n \bar{v}_{K1} = pr. n-n \bar{v}_{K2} = \bar{v}_K$. Ya que los puntos M_1 y M_2 se ubican sobre la misma normal y pertenecen a los mismos eslabones, las proyecciones de los vectores velocidad de éstos sobre la normal $n-n$ también son iguales a los del movimiento de los puntos K_1 y K_2 $pr. n-n \bar{v}_{M1} = pr. n-n \bar{v}_{M2} = \bar{v}_K$.

Debido a que los planos P_1 y P_2 , donde se ubican los puntos M_1 y M_2 , son paralelos, los vectores velocidad de éstos también son paralelos, tienen el mismo sentido y son iguales en magnitud, es decir: $\bar{v}_{M2} = \bar{v}_{M1}$. Teniendo en cuenta que $v_{M1} = \omega_1 r_1$ y $v_{M2} = -\omega_2 r_2$, (en el engranaje externo las velocidades angulares ω_1 y ω_2 tienen sentido opuesto), se tiene: $\omega_1 r_1 = -\omega_2 r_2$ y la relación de

transmisión resulta como: $u_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}$.

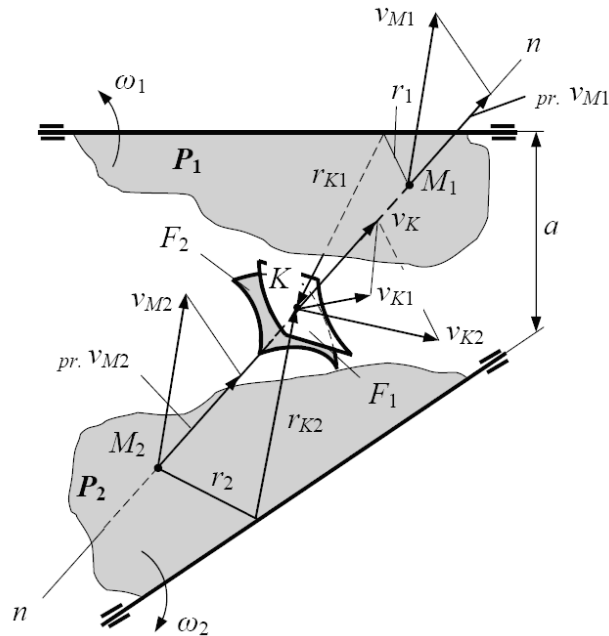


Figura 2. Para la prueba del teorema general sobre la relación de velocidad instantánea.

El valor del teorema consiste en que en los engranajes espaciales, los que no se reducen al teorema de Willis sobre la relación de velocidad instantánea para los mecanismos planos, se pueden encontrar dos planos paralelos que pasan a través de los ejes de los eslabones y con estos determinar la normal común y la relación de velocidad instantánea. El uso del teorema, para el problema planteado, es el siguiente.

En la **Figura 3** en las proyecciones a y b mutuamente ortogonales están representados los sistemas de coordenadas $S'_h(x'_h, y'_h, z'_h)$, que es inmóvil para el engrane generador, y $S'(x', y', z')$, que es inmóvil para el biparamétrico. Ambos sistemas están a distancias L_h y L_2 desde el eje $q-q$ alrededor del cual el sistema S' gira con respecto al S'_h con la velocidad angular $\omega_r = \frac{d\delta_h}{dt}$. Los sistemas de coordenadas están dispuestos de modo que los planos (y'_h, z'_h) y (y', z') sean perpendiculares al eje $q-q$ y estén a una distancia a_ω uno de otro.

Como se ve en la **Figura 3b**, si $a_\omega \neq 0$ se obtiene el engranaje con los ejes cruzados, en el caso $a_\omega = 0$ se recibe el engranaje con los ejes inter secantes. En caso último el plano de simetría de los dientes del engrane biparamétrico pasa a través del eje de rotación del mismo.

Para definir la ecuación de la normal común hay que determinar el plano de su ubicación ya que ésta, en general, puede estar en el plano (x'_h, y'_h) o en cualquier otro paralelo a éste. Para la determinación de la ubicación del plano se pueden emplear métodos matemáticos [1], pero aquí se emplea un método gráfico similar al utilizado en el trabajo [2].

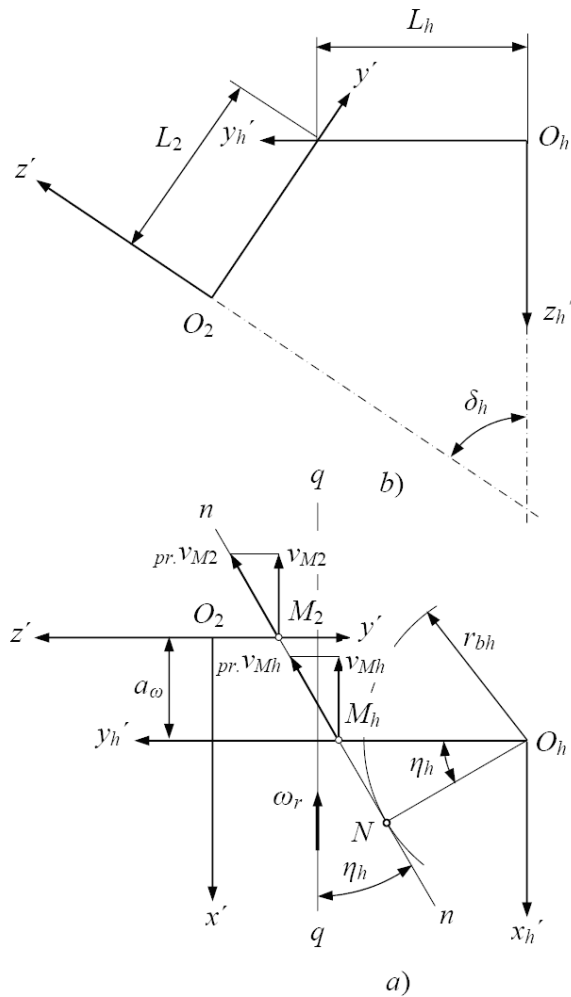


Figura 3. Disposición mutua de los sistemas de coordenadas del engrane generador S_h' y del biparamétrico S' .

Si se supone que la línea de acción se ubica en el plano $d-d$ paralelo al (x'_h, y'_h) , situado a una distancia z^0 de la misma (Fig. 4), entonces, el punto de contacto K , con el movimiento del eslabón 2 alrededor del eje $q-q$, obtiene la velocidad $\bar{U}^{K2} = \bar{\omega}_r \times \bar{r}_K$. Al descomponer \bar{U}^{K2} en componentes \bar{U}_y^{K2} , paralelo al eje y'_h , y \bar{U}_z^{K2} , paralelo al z'_h , se puede llegar a la conclusión siguiente.

La componente \bar{U}_z^{K2} es perpendicular al plano $d-d$, en que se ubica la normal $n-n$, por consiguiente, es perpendicular a la misma y el producto vectorial de éstos es igual a cero: $\bar{U}_z^{K2} \times \bar{n} = 0$. Esto significa que la componente indicada no ejerce ninguna influencia sobre el movimiento relativo de los eslabones.

La componente \bar{U}_y^{K2} se ubica en el mismo plano. Ya que en el plano $d-d$ la línea de acción $n-n$ forma un ángulo de η_h respecto al eje $q-q$ (véase la Figura 3a) resulta que la componente \bar{U}_y^{K2} no es perpendicular a la normal. Por consiguiente, el producto vectorial de éstos no es igual a cero: $\bar{U}_y^{K2} \times \bar{n} \neq 0$.

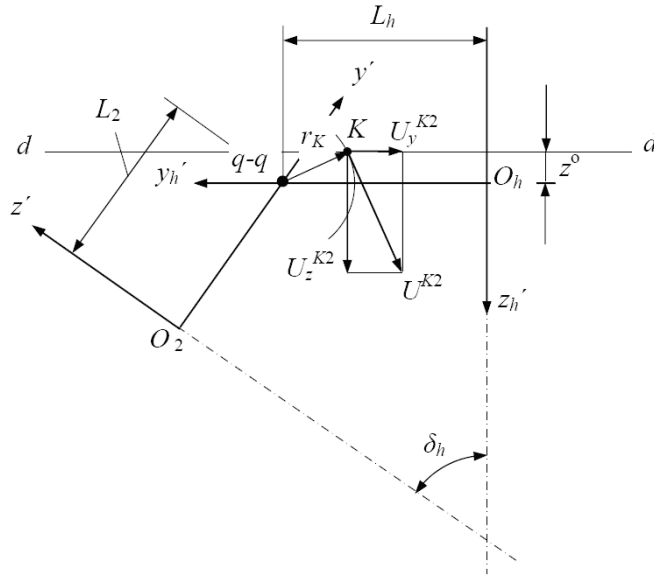


Figura 4. Ilustración para la explicación de la ubicación del punto de contacto K y de la normal común $n-n$ en el sistema de coordenadas de la herramienta de corte x_h', y_h', z_h' .

Si la suposición, hecha anteriormente, fuera correcta, entonces esto indicaría que la herramienta de corte tiene movimiento lineal respecto al eslabón 2 en la dirección del eje y_h' , es decir, la herramienta se aleja del engrane biparamétrico o se acerca al éste, lo que contradice las condiciones de la formación de los engranes.

Las condiciones de tallado dicta el diseño de la máquina para que deba ser hecho el engranaje. En la mayoría de los casos se necesita hacer engranaje con la distancia entre los centros fija. Para el caso de la formación del engrane biparamétrico se necesita el engrane con el eje de oscilación $q-q$ fijo al eje de rotación de éste. Por eso las distancias L_2 y L_h son fijas. Por consiguiente el movimiento relativo en la dirección transversal de los eslabones no se realiza y la componente $\bar{U}_y^{K2} = 0$. De este resulta que el vector \bar{U}^{K2} es perpendicular al plano (x_h', y_h') , entonces, la normal común $n-n$, en el engranaje del engrane biparamétrico con la herramienta de corte, se ubica en el plano (x_h', y_h') , es decir, la distancia z^0 es igual a cero ($z^0=0$).

Para la formación de los dientes de engranes se puede utilizar cualquier curva: circunferencia, cicloide, evolvente, etc. Teniendo en cuenta que en la industria el perfil más usado es de evolvente, éste se toma para la formación del perfil de los dientes del engrane biparamétrico. Por tanto como herramienta de corte se usará un engrane herramienta con perfil evolvente.

Para las investigaciones teóricas se usa el engrane generador el que es el engrane imaginario con perfil idéntico al del filo del engrane herramienta. Para la obtención de su ecuación se toman los sistemas de coordenadas S_h y S'_h , antes descritos, y en el sistema S_h se dispone el perfil del engrane generador (Figura 5). Su ecuación en el sistema S'_h se presentará como:

$$\begin{aligned} x'_h &= \frac{r_{bh}}{\cos \alpha_{xh}} \sin(\alpha_{xh} + \psi_h) \\ y'_h &= \frac{r_{bh}}{\cos \alpha_{xh}} \cos(\alpha_{xh} + \psi_h), \\ z'_h &= z \end{aligned} \tag{1}$$

donde r_{bh} es el radio de círculo básico del engrane generador; α_{xh} es el ángulo de presión en el punto de perfil del diente en la altura del radio vector \bar{r}_{xh} ; ψ_h es el ángulo central que corresponde a la mitad del ángulo entre los dientes en el círculo básico del engrane generador.

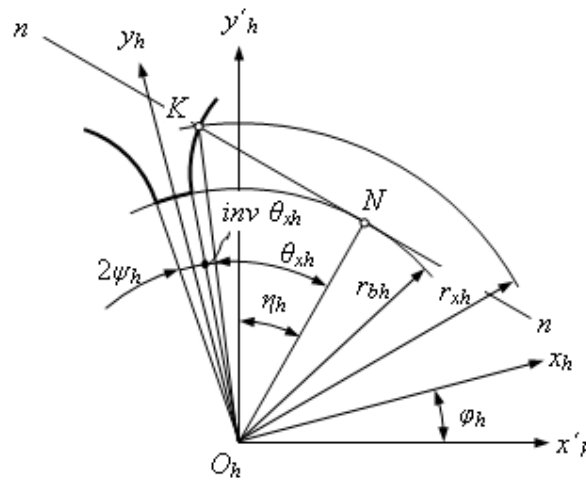


Figura 5. Para la obtención de la ecuación de la evolvente.

En la ecuación (1) el ángulo α_{xh} se relaciona con el φ_h , que es de giro del engrane junto con el sistema de coordenadas S_h , mediante:

$$\alpha_h = \varphi_h + \eta_h - \text{inv} \alpha_{xh} - \psi_h,$$

donde $\text{inv} \alpha_{xh}$ es el ángulo polar del perfil en el punto con el radio vector \bar{r}_{xh} , $\text{inv} \alpha_{xh} = \tan \alpha_{xh} - \alpha_{xh}$ y η_h es el ángulo que determina la orientación de la normal $n-n$ en el sistema de coordenadas S'_h .

El proceso de obtención de los datos, que de manera única definen la ubicación de la normal común $n-n$, es el siguiente.

En la **Figura 3** se presenta la normal $n-n$ dispuesta en el sistema de coordenadas S'_h tangente al círculo básico bajo el ángulo η_h cuyo valor se desconoce. La normal interseca los planos paralelos (y'_h, z'_h) y (y', z') en los puntos M_h y M_2 , respectivamente. Empleando el teorema general sobre la relación de velocidad instantánea, se obtiene la correlación siguiente:

$$\bar{v}_{Mh} = \bar{v}_{M2}. \quad (2)$$

Según la **Figura 3**, el radio vector R_{Mh} del punto M_h del engrane generador es igual a:

$$R_{Mh} = \frac{r_{bh}}{\cos\eta_h}, \quad (3)$$

y el radio vector R_{M2} del punto M_2 , de parte del engrane biparamétrico, es:

$$R_{M2} = L_2 + (L_h - R_{Mh} - a_w \tan\eta_h) \cos\delta_h. \quad (4)$$

Al multiplicar (3) por ω_h y (4) por $\omega_2 = \omega_h u_{2h}$, donde u_{2h} es el valor de la relación de velocidad del engranaje: $u_{2h} = \frac{\omega_2}{\omega_h} = \frac{z_h}{z_2}$ (aquí z_h y z_2 son los números de dientes del engrane generador y del biparamétrico, respectivamente) se obtienen las velocidades de los puntos M_h y M_2 . Para el punto M_h ésta será:

$$v_{Mh} = \frac{r_{bh}}{\cos\eta_h} \omega_h; \quad (5)$$

y para el M_2 :

$$v_{M2} = [L_2 + (L_h - R_{Mh} - a_w \tan\eta_h) \cos\delta_h] u_{2h} \omega_h, \quad (6)$$

Al sustituir (5) y (6) en (2), y tomar, para los engranajes simétricos, $a_w = 0$, resulta:

$$\cos\eta_h = \frac{r_{bh} (1 - u_{2h} \cos\delta_h)}{u_{2h} (L_2 + L_h \cos\delta_h)}. \quad (7)$$

La ecuación (7) es la de la normal común que determina las condiciones del engranaje.

Determinación del espesor de los Dientes del Engrane Biparamétrico

Determinación del espesor de los dientes en la altura de radio arbitrario r_x

Ahora se puede proceder a la determinación del espesor del diente del engrane biparamétrico. Para este se toma el perfil derecho del diente del engrane generador (véase la [Figura 5](#)).

En la [Figura 6](#) se presenta la disposición de los sistemas de coordenadas S' y S'_h , antes descritos, a los cuales se adicionan: el sistema $S_h(x_h, y_h, z_h)$ unido rígidamente con el engrane generador y $S_2(x_2, y_2, z_2)$ unido rígidamente con el biparamétrico. El sistema S_h gira alrededor del eje z'_h respecto al sistema S'_h con la velocidad angular ω_h y el S_2 alrededor del eje z' del sistema de coordenadas S' con la velocidad angular ω_2 . Las velocidades angulares se relacionan mediante:

$$u_{h2} = \frac{1}{u_{2h}} = \frac{\omega_h}{\omega_2}. \quad (8)$$

El espesor del diente en el radio arbitrario r_x se puede determinar de diferentes modos: partiendo de la ecuación de la superficie que se genera determinar la coordenada x_2 del punto que se ubica en el radio r_x , donde la coordenada x_2 es igual a la mitad de la cuerda del espesor del diente, o mediante cortes de la misma superficie, etc. Todos estos métodos exigen la obtención de la ecuación de la superficie lateral del diente del engrane biparamétrico.

Aquí se presenta un método que formalmente no exige la composición de la ecuación de la superficie lateral del diente del engrane que se genera.

La idea consiste en lo siguiente. La superficie lateral del diente del engrane biparamétrico es de doble curvatura y no se reduce al plano, por eso adicionalmente se construye el cilindro auxiliar de radio r_x con el eje coincidente con el z' y se define el punto K de intersección del cilindro con la normal común $n-n$ (Figura 6). Teniendo en cuenta que todos los puntos de contacto del engrane generador y del biparamétrico están en ésta, el punto K se considera de contacto de las superficies conjugadas. Al girar el engrane generador hasta el intersección de la evolvente con el punto K se define la posición angular de éste. Ya que el engrane generador está unido con el biparamétrico mediante la relación de velocidad (8)

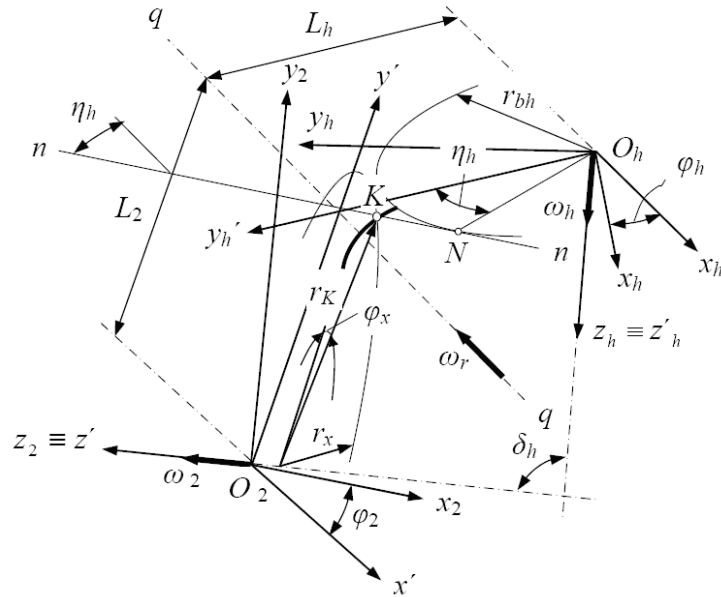


Figura 6. Representación gráfica para la obtención de la ecuación del espesor del diente del engrane biparamétrico.

se define el ángulo entre el plano (y_2, z_2) y el radio vector \bar{r}_K del punto K , lo que determina la mitad del espesor angular del diente en el mismo punto. Luego se calcula la distancia desde el punto K hasta el plano (y_2, z_2) lo que determina la mitad del espesor del diente en el radio r_x .

Comúnmente la normal $n-n$ atraviesa el cilindro en dos puntos. Para definir cual de éstos hay que tomar como el de contacto del engrane biparamétrico con el generador, se necesita analizar la orientación de la normal respecto al sistema de coordenadas S' . Al examinar la Figura 6, se puede llegar a la conclusión que en calidad de punto de contacto se puede tomar solamente uno que esté ubicado a la menor distancia desde el punto N , que es el punto de tangencia de la $n-n$ con el círculo básico. Este punto también tiene la distancia menor desde el plano (y_2, z_2) . Por consiguiente, la tarea consiste en la determinación de las coordenadas de éste punto.

La ecuación del cilindro auxiliar en el sistema de coordenadas S' se escribirá en forma:

$$\begin{aligned} x'_x &= r_x \text{ sen } \varphi_x \\ y'_x &= r_x \text{ cos } \varphi_x \cdot \\ z'_x &= z_x \end{aligned} \tag{9}$$

Determinación del espesor de los Dientes del Engrane Biparamétrico

Determinación del espesor de los dientes en la altura de radio arbitrario r_x

Ahora se puede proceder a la determinación del espesor del diente del engrane biparamétrico. Para este se toma el perfil derecho del diente del engrane generador (véase la [Figura 5](#)).

En la [Figura 6](#) se presenta la disposición de los sistemas de coordenadas S' y S'_h , antes descritos, a los cuales se adicionan: el sistema $S_h(x_h, y_h, z_h)$ unido rígidamente con el engrane generador y $S_2(x_2, y_2, z_2)$ unido rígidamente con el biparamétrico. El sistema S_h gira alrededor del eje z'_h respecto al sistema S'_h con la velocidad angular ω_h y el S_2 alrededor del eje z' del sistema de coordenadas S' con la velocidad angular ω_2 . Las velocidades angulares se relacionan mediante:

$$u_{h2} = \frac{1}{u_{2h}} = \frac{\omega_h}{\omega_2}. \quad (8)$$

El espesor del diente en el radio arbitrario r_x se puede determinar de diferentes modos: partiendo de la ecuación de la superficie que se genera determinar la coordenada x_2 del punto que se ubica en el radio r_x , donde la coordenada x_2 es igual a la mitad de la cuerda del espesor del diente, o mediante cortes de la misma superficie, etc. Todos estos métodos exigen la obtención de la ecuación de la superficie lateral del diente del engrane biparamétrico.

Aquí se presenta un método que formalmente no exige la composición de la ecuación de la superficie lateral del diente del engrane que se genera.

Determinación del espesor en la superficie exterior del engrane

El espesor del diente en la altura de radio arbitrario r_x se necesita para el control de calidad y para el cálculo de la holgura en el engranaje; pero en el estado de la síntesis del engranaje, para evitar la interferencia de los perfiles de los dientes (el diente en punta) hay que determinar el espesor en la superficie exterior del engrane. La superficie exterior del engrane biparamétrico puede ser obtenida mediante un cilindro generador cuyo eje coincide con el eje z_h del engrane de generación (Figura 7). Su radio se toma como:

$$r_c = r_h - h_{a2}m + x_h m,$$

donde: m es el módulo de engranaje; $r_h = \frac{mz_h}{2}$ es el radio de paso teórico del engrane generador; h_{a2} es el coeficiente de altura de cabeza del diente del engrane biparamétrico; x_h es el coeficiente de desplazamiento del engrane generador respecto al biparamétrico (coeficiente de corrección).

La ecuación de esta superficie se obtiene mediante el método cinemático [8], según el cual:

$$\bar{r}_2^e = M_{2h'} \cdot \bar{r}_c, \quad (15)$$

$$\bar{e}' \cdot \bar{V}^{(h2)} = 0, \quad (16)$$

$$\bar{e}' \cdot \bar{U}^{(h2)} = 0. \quad (17)$$

donde \bar{e}' es el vector unitario de la normal a la superficie del cilindro que genera la superficie exterior del engrane biparamétrico; $\bar{V}^{(h2)}$ es el vector velocidad del movimiento relativo en el punto de contacto de las superficies conjugadas con $\gamma = \text{const}$ (aquí γ es el ángulo de intersección de los ejes del cilindro generador y de la superficie generada); $\bar{U}^{(h2)}$ es el vector velocidad relativa en el punto de contacto con $\varphi = \text{const}$ (aquí φ es el ángulo de giro del cilindro).

La ecuación del cilindro de radio r_c en el sistema de coordenadas S'_h tendrá la forma:

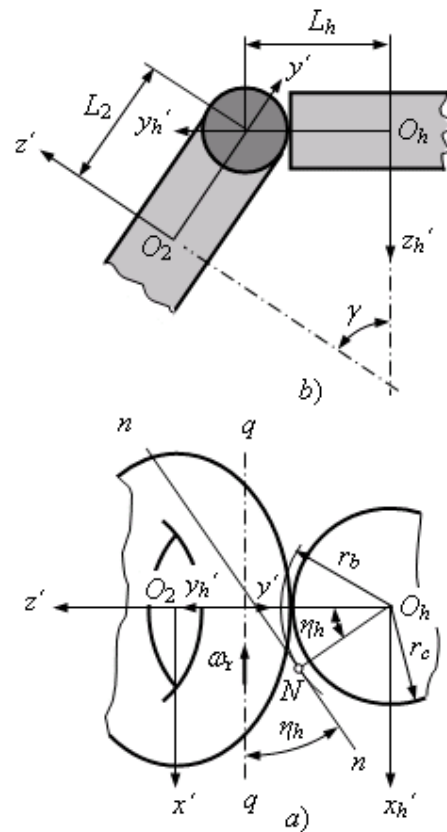


Figura 7. Esquema para obtención de la ecuación de la superficie exterior del engrane biparamétrico.

$$\begin{aligned}
 x'_c &= r_c \cos \varphi \\
 y'_c &= r_c \operatorname{sen} \varphi, \\
 z'_c &= z
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

y la ecuación del vector unitario de la normal tendrá la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 e'_{hx} &= \cos \varphi \\
 e'_{hy} &= \operatorname{sen} \varphi. \\
 e'_{hz} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Las ecuaciones de las velocidades presentadas en el mismo sistema de coordenadas S'_h con $\gamma = \text{const}$ son:

$$\begin{aligned} V_x^{(h2)} &= -y_c'(1 + u_{2h} \cos \gamma) \omega_h - z_c' u_{2h} \omega_h \cos \gamma + u_{2h} (L_2 + L_h \cos \gamma) \omega_h \\ V_y^{(h2)} &= x_c'(1 + u_{2h} \cos \gamma) \omega_h \\ V_z^{(h2)} &= x_c' u_{2h} \sin \gamma \end{aligned} \quad , \quad (20)$$

y con $\varphi = \text{const}$ son:

$$\begin{aligned} U_x^{(h2)} &= 0 \\ U_y^{(h2)} &= -z_c' \omega_r \\ U_z^{(h2)} &= (y_c' - L_h) \omega_r \end{aligned} \quad . \quad (21)$$

Al tomar $\omega_h = 1 \text{ rad s}$ y $\omega_r = 1 \text{ rad s}$ y sustituir (19) y (20) en (16) y (17) también (21) en (17) se obtiene:

$$(L_2 + L_h \cos \gamma) \cos \varphi = 0 \quad (22)$$

$$y \quad z = 0 \quad (23)$$

De las ecuaciones (22) y (23) resulta, que todos los puntos de contacto del cilindro con la superficie exterior del engrane se ubican en el eje y'_h a distancia r_c desde el eje z'_h . La ecuación de la superficie exterior va a tener la forma:

$$\begin{aligned} x_2^e &= (L_2 + L_h \cos \gamma - r_c \cos \gamma) \sin \varphi_2 \\ y_2^e &= (L_2 + L_h \cos \gamma - r_c \cos \gamma) \cos \varphi_2 , \\ z_2^e &= -(L_h - r_c) \sin \gamma \end{aligned}$$

que es de un toróide.

Entonces, para determinar la magnitud del espesor de los dientes en la superficie exterior del engrane biparamétrico primeramente se define el punto de intersección de la normal común $n-n$ con la superficie del toróide mediante:

$$\begin{aligned} x'_{n-n} &= x_2^e \\ y'_{n-n} &= y_2^e , \\ z'_{n-n} &= z_2^e \end{aligned}$$

y luego se resuelvan las ecuaciones (12), (13) y (14).

En la **Figura 8** se muestran los resultados del cálculo del espesor de los dientes en la superficie exterior del engrane biparamétrico generado con los parámetros siguientes: módulo del engrane $m = 1.5\text{mm}$, ángulo de presión de cremallera básica $\alpha = 30^\circ$, número de dientes del engrane generador $z_h = 12$, coeficiente de altura de cabeza del engrane biparamétrico $h_{a2} = 1$. En la gráfica se ve que con el coeficiente de corrección $x_h = 0.45$ y $x_h = 0.56$ se evita la interferencia en todo el rango del ángulo de intersección de los ejes desde $\delta_h = 0^\circ$ hasta $\delta_h = 180^\circ$.

El engrane realizado con el coeficiente de corrección $x_h = 0.56$, está mostrado en la **Figura 9** con el número 1 donde éste está engranado con el engrane cilíndrico 2 cuyos parámetros son idénticos al de generador y 3 con los

parámetros siguientes: módulo de los dientes $m = 1.5\text{mm}$, ángulo del presión de cremallera básica $\alpha = 30^\circ$, número de dientes $z_1 = 20$, coeficiente de altura de cabeza de los dientes $h_{a1} = 1$, coeficiente de corrección $x_h = 0.0$. El engranaje último realiza la relación de velocidad $u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = 1$ y fue

hecho para la realización del ángulo de intersección de los ejes de las flechas desde 180° (los ejes de engranes coinciden) hasta 75° . El engrane indicado fue empleado en un mecanismo de manipulador para realizar el trabajo en ambiente radioactivo y químicamente agresivo [3].

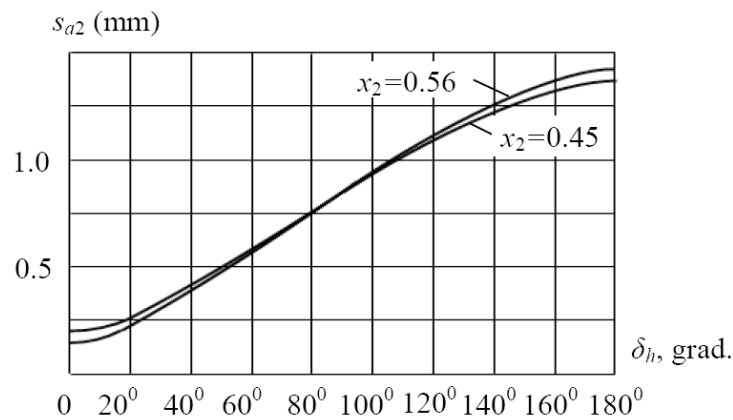


Figura 8. Variación del espesor de los dientes del engrane biparamétrico con la variación del ángulo de intersección de los ejes del engrane generador con el mismo.

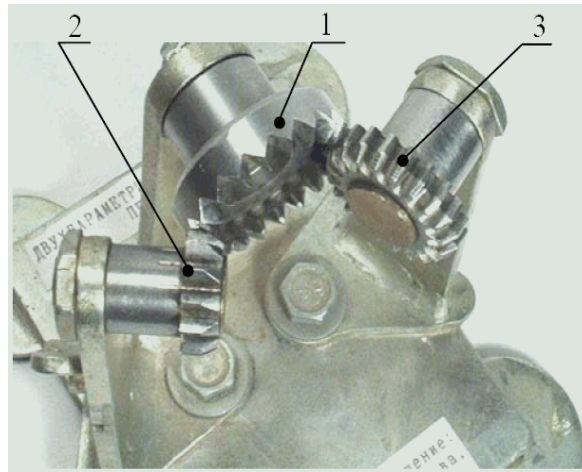


Figura 9. Modelo físico del engranaje del engrane biparamétrico 1 con el cilíndrico 2, idéntico al de generador, y con el engrane 3 cuyos parámetros son diferentes al de generador.

Conclusiones

1. Fue probado que en el engranaje de generación (acoplamiento del engrane generador con el generado biparamétrico) la línea de acción está en el plano que pasa a través del eje $q-q$ perpendicularmente al eje de rotación del engranaje generador.
2. Se obtuvo la ecuación de la línea de acción y las ecuaciones para la determinación de los puntos de intersección de la misma con cualquier cilindro auxiliar de radio r_x .
3. Se obtuvo la ecuación de la superficie exterior del engrane biparamétrico y el método para la determinación de los puntos de intersección de la misma con la línea de acción.
4. Fue elaborado un método para la determinación del espesor de los dientes del engrane biparamétrico tanto en el radio arbitrario r_x como en la superficie exterior del engrane el que formalmente no exige la composición de la ecuación del diente del engrane biparamétrico.
5. Las mediciones físicas del espesor de los dientes de un engrane biparamétrico en la superficie exterior del engrane biparamétrico mostraron la coincidencia completa con los resultados de los cálculos de éste lo que confirma la validez del método matemático presentado. La parte de los dientes en punto del engrane biparamétrico en la superficie cilíndrica, que se nota en la [Figura 9](#), no contradice a los cálculos presentados ya que está fuera del rango de la variación del ángulo de intersección de los ejes y fuera de la superficie exterior del engrane biparamétrico.
6. El procedimiento matemático empleado en este artículo puede ser utilizado no solamente para el cálculo de engranes para engranajes de dos grados de libertad con la variación del ángulo de intersección de los ejes en un rango grande sino también para el cálculo del perfil de los dientes de engranes cilíndricos con dientes hechos en forma de barril para engranajes con el contacto localizado. Estos engranajes también se debe considerar biparamétricos, pero con la variación del ángulo de intersección de los ejes en el rango muy pequeño, de varios minutos hasta varios segundos. El procedimiento matemático mostrado puede ayudar a los diseñadores de las máquinas para determinar la magnitud óptima de la altura del arco del perfil de los dientes en la dirección longitudinal relacionándola con la deformación del sistema mecánico y condiciones de ensamble en vez de elegirla arbitrariamente.

Referencias

1. Voronin B.F. (1974). Investigación geométrica de engranajes especiales de equipo tecnológico de microelectrónica. *Tesis de Doctor*. Instituto de Técnica Electrónica de Moscú, Moscú.
2. Voronin B.F. (2004). Sobre la cinemática de engranajes de dos grados de libertad. *Revista SOMIM "Tecnología y Desarrollo"*. ISSN 1665-7381. **1** (núm.4, año3): (144-150), México.
3. Voronin B.F. (2004). Essential aspects of the Analisis of Biparametric Gear Drives. *Memorias del X Congreso Anual de SOMIM "Una década de Impulso a la Ingeniería Mecánica en México"*. 9-17, Querétaro.
4. Voronin B.F. Sanchez Jiménez y otros autores. (2004)..Socavación en los engranajes de dos grados de libertad. *Memorias del X Congreso Anual de SOMIM "Una década de Impulso a la Ingeniería Mecánica en México"*. 1-8, Querétaro.
5. Ningxin Chen. (2000). Edges of Regression and limit Normal Point of Conjugate Surfaces. *ASME J.Mec. Des.* (**122**): 422-423.
6. Chia-Chang Liu and Chung-Biau Tsay. (2001). Tooth Undercutting of Beveloid Gears. *ASME J.Mec. Des.* (**123**): 571-572.
7. Korostelev L.V. (1970). La razón de velocidades instantánea en los engranajes espaciales. *Teoría de Transmisiones en las Máquinas. Mashinostroenie*. Moscú.
8. Litvin F.L. (1994). Gear Geometry and Applied Theory. *PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ*.