Mecánica Cuántica en el Plano no Conmutativo

Quantum Mechanics in the non Conmutative Plane

Armando Gallegos[1], Pedro B. Espinoza-Padilla[1]
gallegos@culagos.udg.mx / wolfgang@culagos.udg.mx

Recibido: noviembre 27, 2008 / Aceptado: enero 22, 2009 / Publicado: enero 30, 2009

RESUMEN. Se busca encontrar la forma en que son modificados los operadores Hamiltonianos en la mecánica cuántica cuando es implementada la no conmutatividad en el plano. Para ello se muestra una breve introducción de las bases de la mecánica cuántica convencional y se resuelven ejemplos para el caso bidimensional. Se introducen las nuevas relaciones de conmutación necesarias para implementar la no conmutatividad entre las coordenadas y se resuelven tres ejemplos. Se analiza el problema del oscilador armónico en el plano desde el punto de vista de los operadores de creación y aniquilación, tanto para el caso convencional como para el no conmutativo. Finalmente, los resultados muestran explícitamente la no conmutatividad por medio del parámetro de no conmutatividad y en el caso del oscilador armónico, el Hamiltoniano resultante puede ser relacionado con la óptica cuántica.

PALABRAS CLAVE: Operador cuántico, Hamiltoniano, conmutador, relaciones de conmutación, oscilador armónico.

ABSTRACT. We look for the way in that the Hamiltonian operators in quantum mechanics are modified when noncommutativity in the plane is implemented. For this, a brief introduction on foundations of conventional quantum mechanics is presented and bidimensional examples are solved. New commutation relations are introduced to include non commutativity between coordinates and three examples are solved. The problem of harmonic oscillator on the plane is analyzed from point of view of creation and annihilation operators, both the conventional and the non commutative cases. Finally, the results explicitly show noncommutativity by means of noncommutativity parameter and, in the harmonic oscillator case the resulting Hamiltonian can be related with quantum optics.

KEYWORDS: Quantum operator, Hamiltonian, commutator, commutation relations, harmonic oscillator.

Introducción

El estudio de la mecánica cuántica (MC) en nuestros días dista mucho de ser concluido, de hecho, cada día aparecen más dudas que respuestas. En particular, una rama de la MC que está tomando mucha fuerza es la que se desarrolla cuando las coordenadas no conmutan, físicamente esto se puede interpretar como si se tuviera un principio de incertidumbre entre las coordenadas X y Y, de la misma forma en que se tiene el principio de incertidumbre convencional entre el momento y la posición. Este tipo de MC forma la base de teorías más fundamentales en la física moderna, como la teoría de campos, la teoría de cuerdas o incluso la óptica cuántica, la cual puede tener una influencia más directa con el desarrollo de nuevas tecnologías en un futuro no muy lejano. El objetivo general de este artículo es presentar una breve introducción de la mecánica cuántica en el plano no conmutativo, resolver en este nuevo contexto algunos de los ejemplos típicos que se presentan en la teoría convencional y mostrar la forma en que los Hamiltonianos se modifican al introducir esta no conmutatividad.

Bases de la mecánica cuántica

Esencialmente, la MC es la herramienta matemática que se usa en la física u otras ciencias para describir fenómenos en la naturaleza cuyas dimensiones son extremadamente pequeñas, es decir, a niveles sub-atómicos. Una manera práctica de saber cuándo comienzan a cobrar importancia los efectos cuánticos es usando el principio de incertidumbre de Heisemberg

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar, \tag{1}$$

[1] Departamento de Ciencias Exactas y Tecnología, Centro Universitario de los Lagos, Universidad de Guadalajara, Enrique Díaz de León 1144, Col. Paseos de la Montaña, Lagos de Moreno, Jalisco, 47460, México, **www.lagos.udg.mx**

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar, \tag{1}$$

el cual dice que no se pueden conocer simultáneamente la posición y el impulso de una partícula, de tal manera que la "máxima resolución" está restringida por el valor de la constante de Planck reducida ($\hbar = h/2\pi = 1.054 \times 10^{-34}$J seg). Basta con verificar que las dimensiones de la situación física a considerar sean del orden de magnitud de esta constante para asumir que aparecerán efectos cuánticos. Originalmente la MC surgió a partir de dos vertientes: la *Mecánica Matricial de Heisemberg* y la *Mecánica Ondulatoria de Schrödinger*. La primera, como su nombre lo indica, está basada primordialmente en conceptos de álgebra y operadores lineales, mientras que la segunda se basa en la famosa ecuación de Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t), \tag{2}$$

donde m es la masa de la partícula, $V(x,t)$ el potencial que influye sobre la partícula y $\psi(x,t)$ es la función de onda asociada a la partícula. Esta ecuación puede generalizarse a más dimensiones de ser necesario. Al operador entre paréntesis cuadrados se le conoce como *Hamiltoniano del sistema*. Poco tiempo después se demostró que ambas formulaciones eran equivalentes y se adoptó el nombre con el que se conoce a la teoría actualmente. Por sus características, aquí se adoptará la formulación de Schrödinger. Si se resuelve la ecuación (2) por medio de separación de variables y suponiendo que el potencial $V(x,t)$ no depende del tiempo entonces se obtiene la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x), \tag{3}$$

donde E es el autovalor de la ecuación y corresponde a la energía del sistema. La función de onda completa $\psi(x,t)$ se obtiene multiplicando $\psi(x)$ por el factor exponencial temporal $e^{-iEt/\hbar}$.

En MC se puede trabajar en la representación de posiciones o bien en la representación de momentos, por lo que resulta necesario escribir las variables en forma de operador dependiendo de la representación que se maneje. Por ejemplo, si se trabaja en la representación de posiciones, la forma de las variables x y p_x es

$$x, p_x \to x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

mientras que en la representación de momentos se tiene

$$x, p_x \to i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}, p_x$$

y para las otras dimensiones hay expresiones semejantes. Por otro lado, debido a que las variables pueden ser manejadas como operadores, es importante introducir el conmutador entre dos operadores A y B, que está definido como

$$[A,B] \equiv AB - BA,$$

el cual no necesariamente debe ser igual a cero. Tomando el caso particular del conmutador $[x, p_x]$ aplicado a la función de onda en la representación de posiciones se obtiene

$$[x, p_x]\psi(x) = x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) - \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial}\big(x\psi(x)\big) = i\hbar\psi(x),$$

o sea que el conmutador $[x, p_x]$ es igual a $i\hbar$. En general se tienen las siguientes relaciones de conmutación en varias dimensiones

$$\left[x_i, p_{x_j}\right] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [x_i, x_j] = 0, \qquad \left[p_{x_i}, p_{x_j}\right] = 0 \tag{4}$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$, es conocida como *delta de Kronecker*. Por otro lado, es posible pasar una función de onda de una representación a otra utilizando transformadas de Fourier

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp_x\varphi(p_x)e^{ip_xx/\hbar}, \;\; \varphi(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dx\psi(x)e^{-ip_xx/\hbar} \tag{5}$$

donde $\varphi(p_x)$ es la función de onda en el espacio de los momentos.

Para resolver el caso de la partícula libre en el plano se toma la ecuación de Schrödinger en dos dimensiones

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x, y) = E\psi(x, y),$$

las soluciones de esta ecuación diferencial son exponenciales interpretados como ondas planas, las cuales tienen la particularidad de no ser cuadrado integrables. Esto no es una característica conveniente para una función de onda en MC debido a que la probabilidad tiene que ser finita. El problema se resuelve al proponer funciones *delta de Dirac* como las funciones de onda correspondientes al espacio de momentos. De esta manera la función de onda en la representación de posiciones se puede expresar como una *transformada de Fourier*

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp_x dp_y\, \delta(p_x - p'_x)\delta\big(p_y - p'_y\big)e^{ip_xx/\hbar}e^{ip_yy/\hbar},$$

es decir, la función de onda en el espacio de momentos es $\varphi\big(p_x, p_y\big) = \delta(p_x - p'_x)\delta\big(p_y - p'_y\big)$ y la energía es $E = \left(p'^2_x + p'^2_y\right)/2m$.

Para el caso del oscilador armónico, el potencial bidimensional es $V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$, donde ω es la frecuencia angular de las oscilaciones. Sin embargo, es conveniente trabajar en la representación de los momentos, por lo tanto la ecuación de Schrödinger queda escrita como

$$\left[\frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) - \frac{1}{2}m\omega^2\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2}\right)\right]\varphi\big(p_x, p_y\big) = E\varphi\big(p_x, p_y\big),$$

cuyas soluciones están expresadas en términos de *polinomios de Hermite*

$$\varphi_{n_x,n_y}(p_x,p_y)=\frac{1}{N}exp\left[-\frac{p_x^2+p_y^2}{2m\hbar\omega}\right]H_{n_x}\left(\frac{p_x}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right)H_{n_y}\left(\frac{p_y}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right),$$

en donde $N=\sqrt{2^{n_x+n_y}\pi\hbar\omega n_x!\,n_y!}$ y $E=\hbar\omega\left(n_x+n_y+1\right)$, aquí n_x y n_y pueden tomar valores enteros no negativos.

El plano no conmutativo

Los elementos esenciales que deben modificarse para tener un sistema de coordenadas que no conmuta son las *relaciones de conmutación*. En el caso particular del plano, sólo el conmutador de las coordenadas es el que se modifica: $[\hat{x},\hat{y}]=i\hbar\theta$, en donde se ha colocado el circunflejo en la parte superior de las coordenadas para distinguirlas de las conmutativas y θ es conocido como parámetro de no conmutatividad. Este conmutador puede interpretarse como un nuevo principio de incertidumbre entre las posiciones, es decir, que ahora no se localiza una partícula en un punto exacto del plano, sino en una región dispersa. Sin embargo, para poder incluir formalmente esta nueva característica en la ecuación de Schrödinger es necesario reemplazar los productos ordinarios entre funciones de las coordenadas por el producto estrella o *Moyal*, definido de la siguiente forma

$$A(\mathbf{x})\star B(\mathbf{x})=e^{(i/2)\theta_{ij}\partial_i^{(1)}\partial_j^{(2)}}A(\mathbf{x}_1)B(\mathbf{x}_2)\Big|_{\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2=\mathbf{x}},$$

donde $\theta_{ij}=\theta\epsilon_{ij}$ y ϵ_{ij} es el tensor antisimétrico de grado 2. Regresando a la ecuación de Schrödinger, los términos con momentos o constantes no se alteran, pero la parte del potencial se modifica de la siguiente forma [1]

$$V(\mathbf{x})\star\psi(\mathbf{x})=V\left(\mathbf{x}-\frac{\tilde{\mathbf{p}}}{2}\right)\psi(\mathbf{x})$$

donde cada componente del vector $\tilde{\mathbf{p}}$ es $\tilde{p}_i=\theta_{ij}p_j$. Para quien no está familiarizado con las operaciones anteriores, explícitamente las transformaciones que hay que hacer sobre las coordenadas son

$$\begin{aligned}\hat{x}&\to x-\frac{\theta}{2}p_y,\\ \hat{y}&\to y+\frac{\theta}{2}p_x,\\ \hat{p}_x&\to p_x,\\ \hat{p}_y&\to p_y,\end{aligned}\tag{6}$$

aquí las variables x, y, p_x y p_y cumplen con las relaciones de conmutación habituales de la MC (4), también conocidas como *relaciones de conmutación canónicas*.

Aunque las transformaciones que se usarán a lo largo de este artículo son las mostradas en (6), en realidad éstas no son las únicas que satisfacen las nuevas relaciones de conmutación. De hecho, ya se ha trabajado al respecto [2], en donde se incluye además la no conmutatividad en los momentos

$$\left[\hat{x}_k,\hat{x}_j\right]=i\hbar\theta_{kj},$$

$$[\hat{p}_k, \hat{p}_j] = i\hbar B_{kj},$$
$$[\hat{x}_k, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{kj},$$

donde B_{kj} es también una matriz antisimétrica definida de manera similar a θ_{kj}. Las transformaciones lineales generales que se tienen que aplicar para expresar un sistema de variables no conmutativas $(\hat{x}_i, \hat{p}_i)$ en términos de variables canónicas (x_i,p_i), son

$$\hat{x}_i = a_{ij}x_j + b_{ij}p_j,$$
$$\hat{p}_i = c_{ij}p_j + d_{ij}x_j.$$

Para que se cumplan las relaciones de conmutación (6),las condiciones necesarias sobre las matrices **a**, **b**, **c** y **d** son

$$\mathbf{ab}^T - \mathbf{ba}^T = \boldsymbol{\theta},$$
$$\mathbf{cd}^T - \mathbf{dc}^T = -\mathbf{B},$$
$$\mathbf{ca}^T - \mathbf{bd}^T = \mathbf{I}.$$

En [2] se muestra que con diferentes tipos de transformaciones, el Hamiltoniano resultante adquiere distintas propiedades de simetría.

Ahora se analizarán tres ejemplos en el plano no conmutativo. Para el caso de la partícula libre se usará la ecuación de Schrödinger en dos representaciones mezcladas, es decir, en uno de los ejes al usar posiciones y en el otro, los momentos; de tal manera que las ecuaciones que resultan son

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{p_y^2}{2m}\right]\psi(x,p_y) = E\psi(x,p_y),$$
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{p_x^2}{2m}\right]\psi(y,p_x) = E\psi(y,p_x),$$

donde $E = (p_x^2 + p_y^2)/2m$. Para resolver estas ecuaciones se utiliza el método de separación de variables, después del cual se obtienen, de manera independiente, las siguientes funciones de onda

$$\psi(x,p_y) = \frac{e^{ixp_x/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\phi(p_y), \quad (7)$$
$$\psi(y,p_x) = \frac{e^{iyp_y/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\phi'(p_x), \quad (8)$$

donde $\phi(p_y)$ y $\phi'(p_x)$ son funciones indeterminadas. Para poder implementar la no conmutatividad se hará uso de la transformada de Fourier en el plano no conmutativo, definida en [3], de manera que las funciones de onda (7) y (8) quedarían expresadas únicamente en el espacio de momentos

$$\psi(p'_x,p'_y) = \int \frac{dydp_x}{2\pi\hbar}\delta(p_x - p'_x)e^{-\frac{i}{\hbar}\left[y+\frac{\theta}{2}p'_x\right]p'_y}e^{\frac{i}{\hbar}[yp_y]}\,\phi'(p_x)$$
$$= \phi'(p'_x)e^{-\frac{i\theta}{\hbar 2}p'_yp'_x}\delta(p_y - p'_y)$$

$$\psi(p'_x,p'_y) = \int \frac{dxdp_y}{2\pi\hbar}\delta(p_y - p'_y)e^{-\frac{i}{\hbar}\left[x-\frac{\theta}{2}p'_y\right]p'_x}e^{\frac{i}{\hbar}[xp_x]}\,\phi(p_y)$$

$$= \phi(p'_y) e^{\frac{i\theta}{\hbar^2} p'_y p'_x} \delta(p_x - p'_x).$$

Como ambas funciones tienen que ser iguales entonces es válido escribir

$$\psi(p'_x, p'_y) = \delta(p_x - p'_x)\delta(p_y - p'_y),$$

la misma solución que en el caso convencional, ya que el Hamiltoniano de una partícula libre no tiene una dependencia explícita de las posiciones, que es donde se está implementando la no conmutatividad.

Para el caso del oscilador armónico en el plano no conmutativo, resulta conveniente trabajar la ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos

$$E\psi(p_x, p_y) = \left[\frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 \left\{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x} - \frac{\theta}{2}p_y\right)^2 + \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{\theta}{2}p_x\right)^2\right\}\right]\psi(p_x, p_y),$$

en donde ya se sustituyeron las variables de posición no conmutativas por sus correspondientes transformaciones a variables conmutativas (6). Esta ecuación se puede reescribir de la siguiente manera

$$E\psi(p_x, p_y) = \left[\left(1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}\right)\hat{H}_0 - \frac{1}{2}\theta m\omega^2 \hat{J}\right]\psi(p_x, p_y),$$

donde

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) - \frac{1}{2}m\varpi^2\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2}\right),$$
$$\hat{J} = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial p_x}p_y - \frac{\partial}{\partial p_y}p_x\right),$$
$$\varpi = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}}},$$

debido a que los operadores $\hat{H}_0$ y $\hat{J}$ conmutan entre sí, las autofunciones correspondientes a $\hat{H}_0$ también son autofunciones del Hamiltoniano completo. La ventaja radica en que más arriba ya se resolvió la ecuación para $\hat{H}_0$ en el caso de la MC convencional, únicamente hay que cambiar la frecuencia angular ω por ϖ, explícitamente

$$\psi_{n_x,n_y}(p_x, p_y) = \frac{1}{N} exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m\hbar\varpi}\right) H_{n_x}\left(\frac{p_x}{\sqrt{m\hbar\varpi}}\right) H_{n_y}\left(\frac{p_y}{\sqrt{m\hbar\varpi}}\right),$$

donde N y los autovalores tienen exactamente la misma forma que la solución obtenida en la sección anterior, pero con la sustitución de ω por ϖ. La combinación lineal que diagonaliza simultáneamente los operadores $\hat{H}_0$ y $\hat{J}$ y que corresponde a las autofunciones del Hamiltoniano completo es

$$\psi_{n,j}(p_x, p_y) = \frac{1}{N} exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m\hbar\varpi}\right) \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}+j} \sum_{q=0}^{\frac{n}{2}-j} \binom{\frac{n}{2}+j}{r} \binom{\frac{n}{2}-j}{q} (-1)^q i^{r+q} H_{n-(r+q)}\left(\frac{p_x}{\sqrt{m\hbar\varpi}}\right) H_{r+q}\left(\frac{p_y}{\sqrt{m\hbar\varpi}}\right)$$

con $n = n_x + n_y, -\frac{n}{2} \leq j \leq \frac{n}{2}$ y

$$\bar{N} = \sqrt{2^n \pi m \hbar \bar{\omega}} \sqrt{\left(\frac{n}{2} + j\right)! \left(\frac{n}{2} - j\right)!}$$

y autovalores

$$E_{n,j} = \hbar\omega \sqrt{1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}} (n+1) - \theta m \omega^2 \hbar j \,.$$

Como ejemplo final, se tomará ventaja del resultado anterior para estudiar el modelo de Einstein que consiste de un arreglo de *N* osciladores armónicos considerados ahora en el plano no conmutativo, en donde se supondrá que no hay interacción entre ellos y que su frecuencia de oscilación es la misma. Partiendo de una distribución canónica, la probabilidad de que un oscilador se encuentre en el estado con números específicos n y j es

$$w_{n,j} = \frac{e^{-E_{n,j}/kT}}{Z(T,V,1)},$$

en donde $Z(T,V,1)$ es conocida en la física estadística como la función de partición para un solo oscilador y es igual a la suma de los exponenciales de todos los estados posibles

$$Z(T,V,1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n/2}^{n/2} e^{-E_{n,j}/kT} = \frac{1}{2}\left[cosh\left(\frac{\hbar\omega\Theta}{2kT}\right) - cosh\left(\frac{\hbar\omega^2 m\theta}{2kT}\right)\right]^{-1},$$

con $\Theta = \sqrt{4 + m^2\omega^2\theta^2}$. Si se tienen *N* osciladores de la misma frecuencia, entonces la función de partición del total de osciladores correspondiente es simplemente

$$Z(T,V,N) = Z(T,V,1)^N.$$

La ventaja de tener esta función de partición de manera explícita, es que la energía libre se puede escribir en términos de esta última

$$A(T,V,N) = -kTln[Z(T,V,N)] = NkTln\left[cosh\left(\frac{\hbar\omega\Theta}{2kT}\right) - cosh\left(\frac{\hbar\omega^2 m\theta}{2kT}\right)\right] + NkTln2,$$

con lo que es posible obtener diversas características termodinámicas del sistema como la entropía, la entalpía o el calor específico.

Reformulación del oscilador armónico

Ahora se retomará el caso del oscilador armónico. En MC una forma elegante de resolver el problema es con los operadores de creación y aniquilación. Partiendo del Hamiltoniano unidimensional

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

si se definen los operadores a y $a^\dagger$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right),\ a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)$$

entonces el Hamiltoniano queda reescrito como

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \tag{9}$$

Los autovalores del operador $a^\dagger a$, conocido como *operador de número*, son precisamente $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, por lo que se llega a los mismos autovalores que resolviendo el problema de la manera convencional. La extensión a más dimensiones es inmediata, basta con agregar más operadores semejantes al Hamiltoniano obtenido en (9)

$$\hbar\omega(a^\dagger a + b^\dagger b + 1) \to \hbar\omega\left(n_x + n_y + 1\right),$$

donde se supone que las frecuencias son iguales en ambos ejes.

Trasladando el problema al caso del plano no conmutativo, el Hamiltoniano en coordenadas no conmutativas es

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2),$$

que en términos de las transformaciones (6) queda escrito usando variables canónicas como

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left[\left(x - \frac{\theta}{2}p_y\right)^2 + \left(y + \frac{\theta}{2}p_x\right)^2\right] \\ &= \left(1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}\right)\left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\varpi^2}{2}(x^2 + y^2)\right] + \frac{m\omega^2\theta}{2}(yp_x - xp_y), \end{aligned}$$

el cual a su vez puede ser reescrito en términos de operadores de creación y aniquilación

$$H = \left(1 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4}\right)\hbar\varpi(a^\dagger a + b^\dagger b + 1) + i\hbar\frac{m\omega^2\theta}{2}(a^\dagger b - ab^\dagger).$$

Claramente se observa la mezcla entre los operadores correspondientes a ejes distintos en el último término, los autovalores de este Hamiltoniano coinciden con los que ya se vieron en la sección anterior. Si ahora se supone que las frecuencias para cada eje no son necesariamente iguales, entonces se obtiene

$$\begin{aligned} H &= \left(1 + \frac{m^2\omega_y^2\theta^2}{4}\right)\hbar\varpi_x\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{m^2\omega_x^2\theta^2}{4}\right)\hbar\varpi_y\left(b^\dagger b + \frac{1}{2}\right) + \\ &+ i\frac{m\theta\hbar}{4}\left(\omega_x^2\sqrt{\frac{\varpi_y}{\varpi_x}} + \omega_y^2\sqrt{\frac{\varpi_x}{\varpi_y}}\right)(a^\dagger b - ab^\dagger) + i\frac{m\theta\hbar}{4}\left(\omega_x^2\sqrt{\frac{\varpi_y}{\varpi_x}} - \omega_y^2\sqrt{\frac{\varpi_x}{\varpi_y}}\right)(ab - a^\dagger b^\dagger) \end{aligned}$$

donde

$$\overline{\omega}_x^2 = \frac{\omega_x^2}{1+\frac{m^2\omega_y^2\theta^2}{4}}, \ \overline{\omega}_y^2 = \frac{\omega_y^2}{1+\frac{m^2\omega_x^2\theta^2}{4}}.$$

Este tipo de Hamiltonianos son de particular interés dentro de la óptica cuántica [4].

Conclusiones

En este artículo se revisó brevemente de la extensión de la mecánica cuántica convencional al caso en que las coordenadas en el plano no conmutan, lo cual puede interpretarse como una relación de incertidumbre entre las posiciones sobre el plano. Se mostró que es posible replantear el problema transformando las coordenadas no conmutativas a una combinación lineal de coordenadas canónicas, siempre y cuando cumplan con las relaciones de conmutación establecidas. Una consecuencia de esto es que las transformaciones no son únicas y de hecho la simetría de los Hamiltonianos obtenidos depende de la transformación elegida. Se resolvieron tres ejemplos y resulta claro que las soluciones se reducen al caso convencional haciendo tender a cero el parámetro de no conmutatividad. Finamente se hizo una revisión de la solución del oscilador armónico en el plano usando el método de operadores de creación y aniquilación tanto para el caso usual como para el caso no conmutativo en el plano, en este último los Hamiltonianos resultantes son eventualmente usados en la óptica cuántica.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por CONACyT por medio del proyecto No. J49178-F.

Referencias

1. Mezincescu, L. (2000). Star operation in quantum mechanics. arXiv: hep-th/0007046.
2. Smailagic, A., Spallucci, E. (2002). Isotropic representation of the noncommutative 2D harmonic oscillator. *Phys. Rev. D* **65**: 107701.
3. Vaquera, C. A., Lucio M., J. L. (2005). Non-commutative mechanics as a modification of space-time. arXiv: math-ph/0512064.
4. Karassiov, V. P., Klimov, A. B. (1994). An algebraic approach for solving evolution problems in some nonlinear quantum models. *Phys. Lett. A* **191**: 117-126.