USANDO TECNOLOGÍA DIGITAL PORTÁTIL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CÁLCULO

USING PORTABLE TECHNOLOGY IN THE CALCULUS PROBLEM RESOLUTION

Elena F. Ruiz L.[1]
efruiz@ipn.mx
Recibido: noviembre 5, 2011 / Aceptado: agosto 29, 2013 / Publicado: septiembre 4, 2013

RESUMEN. Este artículo aborda la importancia del papel que juega la introducción de tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas, en el nivel superior y dentro del salón de clases, haciendo referencia principalmente al uso de calculadoras graficadoras con capacidad de manipulación simbólica, debido a su versatilidad y bajo costo en comparación con las computadoras. Esta tecnología se puede considerar, desde un punto de vista cognitivo, como un organizador, más que como amplificador, de la mente. Al respecto, se analizó la resolución de un problema de máximos y mínimos con la calculadora graficadora, mediante el criterio de la primera derivada, focalizando la visualización de los estudiantes de los puntos máximos y mínimos de la curva, así como el significado dado por los estudiantes al procedimiento algebraico en la obtención de dichos puntos. Se concluye que la calculadora graficadora permite relacionar registros de representación algebraica y gráfica en la construcción de conceptos.

PALABRAS CLAVE: Educación matemática, calculadora gráficas, enseñanza matemática superior.

ABSTRACT. This paper is about the importance that digital technologies play in mathematics teaching, inside the classroom of higher education. It makes special reference on graphic calculators with symbolic manipulation's capacity due to its versatility and low cost in comparison with computers. This technology can be considered, from a cognitive point of view, as a mind organizer instead of as a mind enhancer. A didactic experience about problem resolution of maximum and minimum, using the criteria of the first derivate, was analyzed. The focus of the analysis was the students' visualization on the maximum and minimum points in the curve, and the meaning they gave to the algebraic procedure in getting such points. It is concluded that the graphic calculator allows making a relation between registers of algebraic and graphic representation for the construction of concepts.

KEYWORDS: Mathematics education, graphing calculators, higher math teaching.

[1] Escuela Superior de Cómputo. Instituto Politécnico Nacional. Av. Juan de Dios Bátiz, s/n, esquina Othón de Mendizabal, Colonia Lindavista, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 03800, Méxio, D.F.

Introducción

Actualmente, la comunidad de investigadores en educación matemática se ha interesado en buscar alternativas que resuelvan los problemas que involucran alguna ineficiencia detectada en los procesos de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas [1,2] , y las nuevas tecnologías digitales les han permitido el desarrollo de investigaciones innovadoras con propuestas promisorias en la educación de esta disciplina numérica [3-5]. Como ejemplo de estas tecnologías, están las calculadoras graficadoras que tienen integrado un software que permite la manipulación simbólica, y que presentan inusuales características pedagógicas que podrían ser útiles al profesor y al alumno para enriquecer de forma significativa el proceso de adquisición del conocimiento matemático.

Por otro lado, estas calculadoras, con capacidad de manipulación simbólica, pueden considerarse desde un punto de vista cognitivo como organizadores de la mente más que como amplificadoras de ésta. Como lo señala Pea [6], la tecnología portátil va más lejos que hacer más fácil o rápido lo que nosotros ya hacemos, permitiendo representaciones múltiples de un concepto matemático, y se espera que tendrá implicaciones radicales tanto en los métodos didácticos como en los propósitos pedagógicos de la educación matemática.

En concordancia, en la investigación que atañe a la didáctica de las matemáticas es conocido que las prácticas actuales del Cálculo se basan en la transmisión de conocimientos, donde se enfatiza el desarrollo de habilidades algebraicas y se desatiende la búsqueda de comprensión sobre las nociones de objetos matemáticos [7, 8]. Por su parte, en las investigaciones que se han desarrollado en el ámbito de la enseñanza–aprendizaje de las nociones de Cálculo se han experimentado, durante los últimos años, una evolución significativa en sus enfoques y propósitos.

En general, los científicos ocupados en esta particular línea de investigación transitaron por estudios que caracterizan las dificultades y obstáculos de naturaleza epistemológica, cognitiva y didáctica, en el aprendizaje de nociones de Cálculo [9-11]. También se han documentado ciertos problemas que derivan del tipo de tratamiento escolar que se confiere a objetos matemáticos notables como las nociones de función, límite, continuidad, diferenciación e integración [12]. En otros trabajos, los investigadores se han preocupado por analizar las razones que subyacen a tales dificultades y por proporcionar soluciones efectivas, a través de propuestas didácticas, que se sustentan en diversos marcos teóricos [13-15].

Sin embargo, la indagación del impacto pedagógico que acompaña la introducción de dispositivos electrónicos portátiles en la enseñanza de disciplinas matemáticas a nivel superior, está en franco desarrollo y avanza en logros y hallazgos a la par que emergen nuevas, potentes y más versátiles tecnologías disponibles en el aula de clase y al alcance de la mano de docentes y aprendices. Al respecto, poco se ha reportado sobre el rol de organizador de enseñanza-aprendizaje atribuible a las calculadoras gráficas programables, que comúnmente se han investigado más como facilitadoras de cálculos intricados que como herramientas de formación del razonamiento numérico y meta numérico de los usuarios.

Consecuentemente, el propósito de este artículo es contribuir, con base sistemática y científica, a la importancia del papel que juega la introducción de tecnología digital, específicamente calculadoras graficadoras con capacidad de manipulación simbólica, en la enseñanza de objetos matemáticos esenciales, dentro del salón de clases en el nivel superior.

Pregunta de investigación

Por lo anteriormente escrito se plantea la siguiente pregunta: ¿De qué manera, la tecnología digital portátil sirve para desarrollar procesos de visualización, representación y comprensión de objetos matemáticos esenciales en educación matemática universitaria por parte de maestros y alumnos?

Marco de Referencia

Las calculadoras como tecnologías cognitivas

La Matemática Educativa, como campo de investigación, tiene un amplio espectro de temas de interés que se proyectan en el tiempo. Por una parte, permite indagar puntos clásicos acerca de las razones y las formas por las cuales un alumno se apropia de tal o cual concepto matemático, pero además, desde una perspectiva innovadora, conlleva a analizar el impacto del desarrollo de tecnologías emergentes introducidas en la enseñanza. Estos últimos temas de estudio, se sustentan en resultados recientes de experiencias didácticas, vinculadas a la psicología cognitiva, las cuales tienen que ver con el procesamiento de la información matemática en la mente del individuo (percepción, memoria, pensamiento), coadyuvado por herramientas digitales portátiles.

Según Pea [6], la inteligencia no es una cualidad de la mente sola sino un producto de la relación entre las estructuras mentales y las herramientas del intelecto proporcionadas por la cultura, por lo que a estas herramientas las denomina como *"tecnologías cognitivas".* Mucho antes de que las computadoras y las calculadoras aparecieran, los instrumentos técnicos tales como el lenguaje escrito expandieron la inteligencia humana en forma notable.

Al respecto, se hace referencia a las tecnologías cognitivas como entidades promotoras de enseñanza-aprendizaje, que como cualquier medio didáctico, ayudan a trascender las limitaciones de la mente, en el pensamiento, aprendizaje y actividades de resolución de problemas [6]. También, se reportan a las tecnologías cognitivas como potenciales entidades reorganizadoras de la mente, más que amplificadoras de ésta. En este sentido, se pueden incluir entre este grupo de herramientas, entidades tan diversas como el gis y el pizarrón, el lápiz y el papel, el lenguaje escrito y los sistemas simbólicos de notación matemática, y más recientemente, cualquiera de los dispositivos informáticos (particularmente, las computadoras y las calculadoras).

Por otro lado, Tall [16] introduce la noción de *organizador genérico*, y lo define "como un medio ambiente (o micromundo) que capacita al aprendiz a manipular ejemplos (y si es posible contraejemplos) de un concepto matemático específico o un sistema relacionado de conceptos". La intención es ayudar al aprendiz a obtener experiencias que le provean de una estructura cognitiva sobre la cual pueda reflejar o construir conceptos más abstractos. Un simple ejemplo de organizador genérico es el programa Magnify del paquete Graphic Calculus [15], diseñado para permitir a los usuarios amplificar cualquier parte de la gráfica de una función especificada.

Ahora bien, la mayoría de las calculadoras graficadoras tienen la capacidad de amplificación similar a la del programa Magnify y se pueden considerar también como un ejemplo de organizador genérico. A manera de ejemplo se consideran los siguientes modelos de Texas Instruments: TI 81, 83, 85, 86, 89, 92 y 92 Plus, pero es necesario mencionar que, aunque cada modelo tiene algunas características que también pueden ser consideradas como organizadores genéricos, es imprescindible mencionar que solamente los modelos TI 89, 92 y 92 Plus tienen la capacidad de manipulación simbólica, y estos modelos tienen integrada una versión del programa Derive.

Además, la tecnología digital portátil también puede ser considerada como una herramienta que permite la visualización. En términos de la definición de Zimmerman [17], la visualización permite describir los procesos de producción o uso de representaciones geométricas o gráficas de conceptos matemáticos, principios o problemas, ya sea dibujados a mano o generados por computadora. Es menester referir que las calculadoras graficadoras no tienen la potencia de una computadora ni la resolución de un monitor súper VGA. Sin embargo, permiten aplicar la definición anterior en cuanto a su uso y utilidad práctica.

Analogamente, Hitt [18] menciona que la visualización de los conceptos matemáticos no es una actividad cognitiva trivial: visualizar no es lo mismo que ver. En nuestro contexto, visualizar es la habilidad para crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones de un concepto y, si es necesario, usar el papel o la computadora para expresar la idea gráfica del objeto matemático en cuestión.

En el mismo orden de ideas, Duval [19] señala que "la visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema, desde un sistema semiótico de representación a otro", y que "investigaciones recientes sobre los sistemas semióticos de representación han puesto de manifiesto la importancia de la articulación entre diferentes representaciones de conceptos numéricos y meta numéricos en el aprendizaje de objetos esenciales de naturaleza matemática". En este sentido, la tecnología digital portátil es potencialmente útil porque permite realizar diferentes representaciones (algebraicas, numéricas y gráficas) de estos conceptos matemáticos.

Consecuentemente, se ha de aceptar como un hecho que el uso de la calculadora graficadora permite un mayor acceso a la representación múltiple de objetos matemáticos, promoviendo la articulación entre diferentes representaciones de los conceptos numéricos y meta numéricos, facilitando el paso de novato a experto, a un nivel de abstracción mayor de aprendizaje y razonamiento matemático [2].

La calculadora y la enseñanza de las matemáticas

En cuanto a la enseñanza de las matemáticas, hay un debate abierto sobre lo adecuado o no de la introducción de calculadoras como herramientas facilitadoras del cálculo en niveles de educación elemental. Para los defensores de ello, un buen principio es el de usar las calculadoras coadyuvando a la instrucción y la comprensión, es decir, solamente cuando ellas mejoren la calidad de la educación [12].

En ese sentido, se pueden identificar cuatro formas en las que las calculadoras muestran su utilidad instruccional en la educación matemática:

1. Como una ayuda para el instructor durante la clase. Aquí el instructor puede usar las calculadoras al menos de tres formas diferentes: mostrando pantallas (a manera de diapositivas), simulaciones y demostraciones (visual-dinámicas).
2. Como una ayuda para resolver problemas. En esto es donde los estudiantes aprenden cuándo usar la tecnología y cuándo no, y, simultáneamente, a cultivar un balance entre la habilidad en el uso de las nuevas tecnologías y la forma tradicional de trabajar con lápiz y papel.
3. Como un medio para alentar a los estudiantes a tratar a las matemáticas como un objeto experimental:

   La mayor parte de las clases tradicionales se gastan el tiempo transfiriendo un conocimiento existente, sin pasar por un paradigma interactivo que genere nuevo conocimiento. Esta es la causa primaria, la restricción del tiempo, de que no haya una apropiada formación matemática: toma un largo lapso para que el estudiante pueda hacer suficientes ejemplos para estar en posición de entender, hacer una conjetura y posteriormente probarla. Los dispositivos digitales mencionados permiten acortar los tiempos al añadir tales componentes racionales en todos los cursos de matemáticas.

4. Como un medio para capturar el espíritu innovador y la emoción de vivir el desarrollo consistente de las matemáticas. Los matemáticos saben que la matemática real es viva, excitante, llena de belleza, y que está constantemente bajo perfeccionamiento, mientras que la mayoría de lo que se enseña en las clases tradicionales es una matemática estática, descontextualizada y asociada al pasado.

Por ello, se conjetura que introducir la tecnología digital portátil en el salón de clases ayuda al docente a innovar y escudriñar sobre cómo enseñar, forzando a la experimentación con nuevas ideas, revitalizando el esfuerzo de enseñar, permitiendo a las matemáticas ser enseñadas, mejorando la forma de hacerlo y permitiendo que el material tradicional sea enseñado más efectivamente, facilitado por la introducción de material no tradicional.

Particularmente, las calculadoras graficadoras con capacidad de manipulación simbólica pueden ser integradas al salón de clase de matemáticas como una herramienta dinámica para fomentar el aprendizaje, en el cual los estudiantes, trabajando individualmente o en grupos en un laboratorio, pueden descubrir principios matemáticos observando, haciendo hipótesis y verificando sus conjeturas. Mediado por las virtudes de estos dispositivos electrónicos, los estudiantes pueden ser alentados a ver a las matemáticas como una ciencia experimental cuyos conceptos e interrelaciones pueden ser mejor visualizados y aprendidos a través de la exploración y el razonamiento.

Estas nuevas tecnologías se pueden ver como herramientas que proporcionan, además de las capacidades gráficas, de cálculo y de manipulación simbólica, oportunidades de enseñanza y aprendizaje interactivas dentro del salón de clase. Adicionalmente, al maestro y al estudiante les sirve como un recurso utilitario de actualización adentro y fuera del salón de clase.

En México, se está dando un movimiento nacional para reformar la enseñanza de las matemáticas en todos niveles, para incrementar su comprensión, apreciación y motivación. Muchos estudiantes gastan su energía en manipulaciones de práctica rutinaria, de tal manera que tales habilidades se convierten en un foco primario de estudio. Los estudiantes comienzan a percibir a las matemáticas como una serie de obstáculos a vencer, con poca cohesión y poca relación con otras situaciones de aplicación.

Hoy hay diversidad de formas en que las calculadoras son usadas en la investigación en educación matemática, y muchas de ellas están alineadas con actividades de enseñanza y con el aprendizaje de las matemáticas en diferentes niveles educativos. Por ejemplo, los estudiantes pueden aprender a programar para abordar ciertos tipos de problemas, o pueden usar el software que ya viene integrado en la calculadora como ambiente digital para explorar ideas. La principal diferencia entre las actividades del estudiante y el investigador es que el segundo generalmente trata de cubrir los dominios del conocimiento, los cuales son establecidos por la mayoría de los miembros experimentados de la comunidad matemática. Así, el investigador intenta preparar nuevos caminos y utilidades de estos dispositivos. Por supuesto, para el estudiante, estas tecnologías y las matemáticas son innovaciones que está descubriendo, y aquí podría haber fuertes analogías con el investigador, pero la gran porción del trabajo del estudiante tiene que ver con las matemáticas institucionalizadas que son ya parte de un sistema de conocimiento organizado.

Consecuentemente, una de las diferencias entre el investigador y el estudiante radica en que el primero está motivado por el descubrimiento y el segundo no; el estudiante sólo espera conocer las vías por las cuales el dispositivo digital facilita la tarea pedagógica programada. Este hecho abre fuertes posibilidades para complementar la educación matemática con el uso de la calculadora. Se tienen expectativas de que la calculadora juegue un papel coadyuvante de la motivación por el descubrimiento, más allá del limitado y frecuente uso de ésta como herramienta algorítmica de cálculo que continúa marcando la tradición más conservadora de la matemática escolarizada, a través del desarrollo de investigaciones innovadoras sobre la enseñanza de las matemáticas y la generación de actividades con calculadoras gráficas, diseñadas para ayudar a los estudiantes a conceptualizar y comprender objetos e ideas matemáticas.

Al respecto, en muchos países, la enseñanza de las matemáticas ha tomado una forma de lectura clásica para la mayoría de los maestros, y se muestra de manera obvia y evidente en la escuela secundaria y en niveles básicos universitarios, en donde perdura la didáctica matemática convencional. Sin embargo, aunque ha habido numerosas experiencias exitosas de reforma e innovaciones pedagógicas, ha habido cambios importantes en los programas oficiales casi en todas partes y se han producido nuevos materiales en grandes cantidades, sigue siendo demasiado frecuente que, dentro del salón de clase, los maestros de matemática hablan y los estudiantes escuchan.

Análogamente, los exámenes de matemática a escala nacional, casi en su totalidad, evalúan más conocimiento de rutina que pensamiento crítico independiente; más memoria procedimental que competencia numérico-analítica. Sin embargo, la comunidad académica preocupada de actualizar la práctica pedagógica a la innovación tecnológica, tiene la expectativa de que con la diseminación y masificación de las calculadoras gráficas en las aulas, estas prácticas tradicionales tenderían a cambiar. Casi todas las rutinas comunes se convertirían en triviales, y como las máquinas no resuelven autónomamente los problemas, quienes las usen tendrían que pensar qué hacer, para qué hacerlo y cómo interpretar el desplegado y los resultados obtenidos. Aunque las computadoras pueden, por supuesto, tener el mismo efecto, éstas no están ni estarán tan al alcance del usuario como las calculadoras gráficas.

Consecuentemente, muchos matemáticos y educadores piensan que la tecnología debe ser utilizada ampliamente en los salones de clases de matemáticas [3,4]. La realidad, sin embargo, es que la tecnología no se usa con la frecuencia deseada en las aulas, ni en el salón de bachillerato ni en el de la universidad. La principal causa es de índole financiera, porque la situación económica impide la adquisición masiva de las computadoras para las escuelas en muchos países [3], al grado de que existen autores que mencionan que la única actividad en la escuela para masas es prácticamente la explicación del maestro soportada o basada en un libro de texto. Así, no todas las ventajas del uso de la tecnología en el salón de clases de matemáticas están al alcance de todos los estudiantes, simplemente debido a que no hay suficientes calculadoras y computadoras en las escuelas. Esto será un problema durante un largo tiempo, también, debido a que una nueva tecnología hace a la anterior obsoleta, y el software nuevo e interesante no funciona en las viejas computadoras.

Sin embargo, la comunidad científica sigue insistiendo y reportando beneficios y ventajas de la nueva concepción de una pedagogía coadyuvada por la tecnología digital. Al respecto, se ha señalado que las calculadoras gráficas traen consigo el poder de la visualización a todos los estudiantes de cálculo [20, 21]. También, se han reportado [3] 10 actividades fundamentales que pueden realizarse con la "tecnología portátil de visualización" en el salón de clases, las cuales son:

1) Problemas de acercamiento numérico.

2) Uso de manipulaciones analíticas para resolver ecuaciones y desigualdades, y posterior soporte utilizando métodos visuales.
3) Uso de métodos visuales para resolver ecuaciones y desigualdades, para después confirmarlos utilizando métodos algebraicos.
4) Modelado, simulación y solución de situaciones problema.
5) Uso de escenarios visuales generados por computadora para ilustrar conceptos matemáticos.
6) Uso de métodos visuales para resolver ecuaciones y desigualdades, las cuales no pueden ser resueltas o son imprácticas utilizando métodos algebraicos.
7) Conducir experimentos matemáticos, hacer y probar conjeturas.
8) Estudiar y clasificar el comportamiento de diferentes clases de funciones.
9) Pronosticar conceptos de cálculo.
10) Investigar y explorar varias conexiones entre diferentes representaciones de una situación problema.

En este sentido, y alineado a las tendencias observadas en la revisión documental, el propósito esencial del presente artículo es demostrar algunas evidencias de la importancia que tiene el uso de la calculadora graficadora al permitirle al estudiante el empleo de la visualización geométrico-espacial, y no sólo la abstracción de lo algebraico en la resolución de un problema que se trabaja en el salón de clases.

Metodología

Sujetos

La experiencia didáctica se realizó con un grupo de 38 estudiantes, de ambos sexos, de aproximadamente 18 años en promedio de edad, que cursan el primer semestre universitario en la Unidad de aprendizaje de Cálculo en una Unidad Politécnica de Nivel Superior.

Actividad de Máximos y Mínimos

En el presente artículo se muestra una actividad empleando a la calculadora graficadora en su resolución.
El tema que se trató fue el de obtener máximos y mínimos en una función.
Primeramente, se trabajó de forma algebraica y a continuación se muestra un pasaje extraído del salón de clases:

Se pidió a los estudiantes calcular los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ en el intervalo $[0,2]$.

Profesor: ¿Cómo podemos saber cuáles son los puntos máximos y los puntos mínimos de la función en el intervalo dado?
Alumno 1: Obtenemos la primera derivada de la función que es: $f'(x) = 4x^3 - 10x = x(4x^2 - 10)$.
Profesor: ¿Para qué derivamos la función?
Alumno 2: Para calcular los valores de *x* para los cuales la derivada se hace cero.

El alumno procede a despejar *x* y dice:

Alumno 2: La derivada se hace cero si $x = 0$, o bien si $4x^2 - 10$, es decir, $x = 0$ y $x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$. Como la derivada de la función existe para todos los valores del dominio.
Profesor: De acuerdo al procedimiento que están siguiendo, ¿qué continuaría?

Alumno 2: Ya se tienen los valores que son máximos y mínimos, es decir, hay un máximo cuando $x=0$ y $x=\frac{\sqrt{10}}{2}$, y $x=-\frac{\sqrt{10}}{2}$

Profesor: ¿Cuáles serían los puntos máximos y cuáles los mínimos en el intervalo $[0,2]$?
Alumno 3: Se toman valores para saber cómo cambian los signos.
Profesor: ¿Cuáles valores y por qué?
Alumno 3: No recuerdo.

Hasta aquí se muestra el trabajo que realizaron los alumnos.

Resultados y Análisis

Al revisar la forma convencional de proceder de los estudiantes en la resolución del problema, se observan varios aspectos:

1. Los alumnos en ningún momento hacen alusión a una gráfica para visualizar los puntos máximos y mínimos de la función.
2. Trabajan en el terreno algebraico, pero al parecer su aprendizaje ha sido mecánico, debido a que no le dan sentido a lo que están realizando, es decir, no tiene un significado para ellos.
3. No logran determinar los puntos máximos y mínimos debido a que no se acuerdan de todos los pasos, lo que permite señalar que todo ha sido memorístico.
4. No le dieron importancia al intervalo en el que se pedía determinar los puntos críticos.

Debido a las deficiencias mostradas por los estudiantes, se muestra otro pasaje que se dio en el salón de clases, en donde el profesor explicó situaciones donde había errores y confusiones en los estudiantes:

La clase continuó y el maestro, auxiliado por la calculadora gráfica aclaró situaciones y dudas de los alumnos:

Profesor: Recuerden que la derivada, desde el punto de vista geométrico, es la pendiente de la recta tangente en un punto dado de la gráfica, y si ustedes derivan la función y la igualan a cero, lo que significa gráficamente es que la pendiente vale cero, es una recta horizontal en un punto de la gráfica, y al ser una recta horizontal entonces hay un punto máximo o un punto mínimo. Observen la gráfica (figura1).

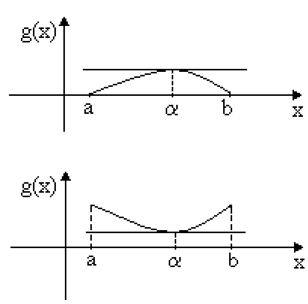

Figura 1. Gráfica en la que se representa la pendiente de una recta tangente a la curva en un punto

Profesor: En el caso que estamos trabajando, tenemos:
Tomando en cuenta que la función sólo se está analizando en el intervalo $[0,2]$, los números críticos son $x=0$ y $x=\frac{\sqrt{10}}{2}$. El valor $x=-\frac{\sqrt{10}}{2}$ no se considera como un número crítico porque no pertenece al intervalo $[0,2]$. Como los máximos y los mínimos locales sí existen, se dan en el interior del intervalo. Entonces, en $x=0$ no puede haber ni máximo ni mínimo local.

Por tanto, el único valor a considerar es $x=\frac{\sqrt{10}}{2}$. Este valor sugiere que se construyan los intervalos $\left(0,\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{10}}{2},2\right)$. Tomamos un valor de prueba, *k*, en cada uno de los intervalos como se muestra en la (tabla 1).

Tabla 1. Intervalos de monotonía de $f(x)=x^4-5x^2+4$ en $[0,2]$

Intervalo	$\left(0,\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{10}}{2},2\right)$
valor de prueba *k*	1	$\frac{18}{10}$
$f'(k)$	-6	$\frac{666}{125}$
Signo de $f'(x)$	$f'(x)<0$ (-)	$f'(x)>0$ (+)
Comportamiento de *f*	Decrece	Crece

De la tabla 1 podemos concluir que la gráfica de la función $f(x)=x^4-5x^2+4$ en $[0,2]$, tiene un mínimo local en $x=\frac{\sqrt{10}}{2}$ cuyo valor es $f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^4-5\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+4\cong-2.25$.

La gráfica de la función no tiene máximos locales. Sin embargo, sí tiene un máximo absoluto en $x=0$ cuyo valor es $f(0)=(0)^4-5(0)^2+4=4$. Ver la gráfica de la función que se muestra en la figura 2.

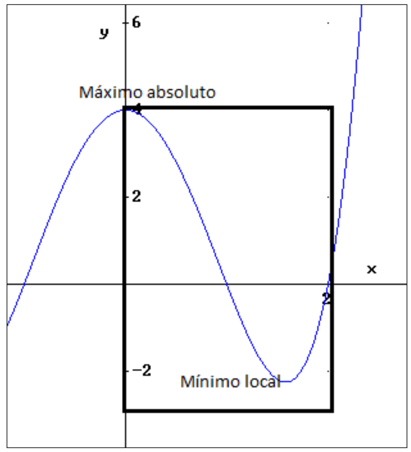

Figura 2. Gráfica de $f(x)=x^4-5x^2+4$ en $[0,2]$

Se observa que la gráfica se analiza en el intervalo $[0,2]$, y que, si se cambia el intervalo de análisis, los extremos locales pueden cambiar.

Conclusiones

La metodología didáctica tradicional genera debilidades en las competencias matemáticas de los estudiantes y reproduce errores en el procesamiento de la información.

La introducción de la calculadora gráfica en el aula permite hacer énfasis en el significado geométrico espacial de la circunstancia problemática y amplía las posibilidades de comprensión de los procedimientos.

El hecho de que las calculadoras graficadoras puedan ser utilizadas ampliamente, permite el uso efectivo de conceptos, procedimientos y representaciones en la presentación de diferentes objetos matemáticos. Esto representa importantes posibilidades de enriquecimiento de variedad de actividades que son esenciales para obtener las metas comúnmente presentes en los programas de las matemáticas del bachillerato y de la universidad.

Referencias

1. Ruiz, E. F. 2011 *Indicadores teóricos para la Construcción de Conceptos del Cálculo Diferencial*. Proyecto de investigación registrado en la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP) del Insituto Politécnico Nacional con núm. de registro CGPI 20110343. México. IPN, 2011.
2. Hitt F. 2003. *Funciones en contexto*. Editorial Pearson. Educación (Prentice Hall). México. 34-56.
3. Carvalho, J. (2006). Are Graphing Calculators the catalyzers for a real change in mathematics education. En Gomes, P. y Waits B. (Eds), *Roles of Calculators in Classrrom*, 21-30. Una Empresa Docente & Name of Publisher. USA.
4. Demana F. & Waits B. (1998). Pitfals in Graphical Computers, or Why a Single Graph isn't Enough. *College Mathematics Journal* **19**(4): pp. 177-183.
5. Kieran, C. (1993), Functions, Graphing and Technology: Integrating Research on Learning and Instruction in Integrating Research in the Graphical Representation of Functions, T. Carpenter, E. Fennema and T. Romberg (Eds.), First Edition, 189-237. Erlbaum Hillsdale, N.J.
6. Pea, R. (1997). Cognitive Technologies for Mathematics Education. En Shoenfeld A. (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*. First Edition, 120-151. Hillsdale N.J. Lawrence Erlbaum Associates
7. Contreras, A. (2001). *El límite en el bachillerato y primer año de universidad. Perspectivas desde los enfoques epistemológicos y semióticos*. Obtenido en julio 1, 2008, del sitio web de la Universidad de Granada, Grupo Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica de la SEIEMhttp://www.ugr.es/~jgodino/siidm/huesca/limitebachillerato.pdf
8. Zuñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* **10** (1): 145–175.
9. Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* **9**(1): 1–29.
10. Crespo, C. (2004). El concepto de continuidad y sus obstáculos epistemológicos. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen XVII, pp. 39–44). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.
11. Godino, J., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico–semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **26**(1): 39–88.
12. Hitt, F. (1994). Teacher's difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematic* **16** (4): 10–20.
13. Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas* 30, 67–82.
14. Tall, D. (1986). The complementary roles of short programs and prepared software for mathematics learning.*Bulletin of the IMA 23*, 128–133
15. Tall, D., Blokland, P. & Kok, D. (1990). *A graphic approach to the calculus (for IBM compatible computers).* USA: Sunburst, Pleasantville, NY
16. Tall, D. (1996). Functions and Calculus Education . En: A. J. Bishop et al (eds.), *International Handbook of Mathematics* . First Edition: 289-325. Kluwer Academic Publishers, Netherlands
17. Zimmermann W. (2001). Visual Thinking in Calcullus. In Zimmermann W. & Cunningham S. (Eds), *Visualization in Teaching and Mathematics* . **2**.(2): 127-138 . Series. USA. MAA
18. Hitt, F 1995. Intuición Primera versus Pensamiento Analítico. Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa, Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica, México, **7**(1): 63-75.
19. Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funciona- miento cognitivo del pensamiento. In: F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa II*., Primera Edición: 101- 120. Grupo Editorial Iberoamérica. Cd. De México
20. Goldin, G. & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of Mathematical Learning* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates **4**(2):. 397-430.
21. Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. (2005). The Role of Visualization in the Middle School Mathematics Curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Winter Edition. **11**(1): 49-60.